

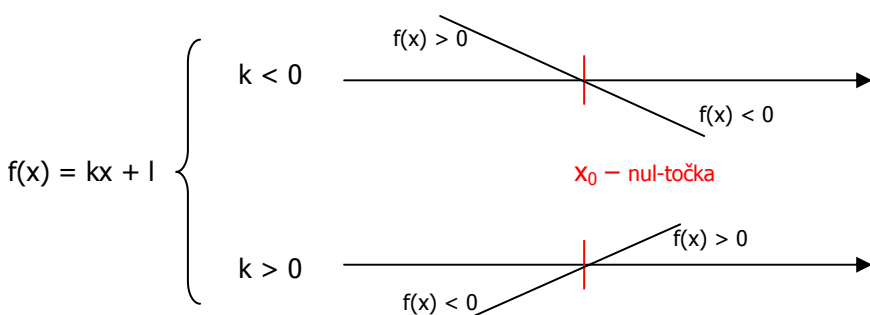
Maturalna zadaća iz matematike
Rješenja zadataka

1. a) Riješi jednadžbu $|x| + |7 - x| + 2|x - 2| = 4$

Rješenje:

Najprije se treba riješiti apsolutnih vrijednosti tako da za svaki izraz unutar apsolutne vrijednosti odredimo za koje $x \in \mathbf{R}$ je pozitivan a za koje negativan. Primjetimo da su unutar apsolutnih vrijednosti linearni izrazi (izrazi oblika $kx + l$) te je dovoljno naći **nul-točke** tih izraza te na osnovu broja k odrediti intervale za koje su izrazi pozitivni odnosno negativni.

Naime, zbog svojstava linearne funkcije $f(x) = kx + l$, ako je k **negativan**, linearni **izraz je pozitivan** za sve $x < x_0$, a negativan za $x > x_0$, dok je za $k > 0$ „ponašanje“ linearnog izraza suprotno.



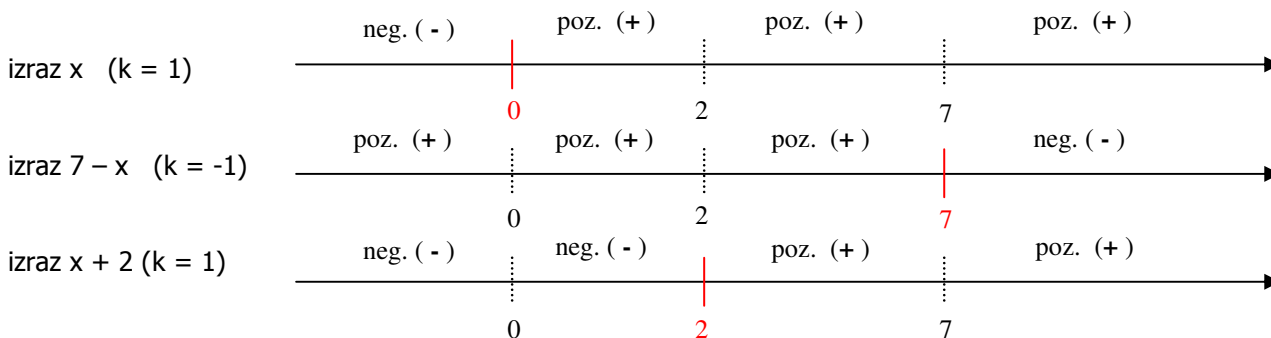
Dakle najprije riješimo tri jednadžbe:

1) $x = 0$
 $x_0 = 0$

2) $7 - x = 0$
 $x_0 = 7$

3) $x - 2 = 0$
 $x_0 = 2$

te na osnovu nul-točki i „ponašanja“ linearne funkcije zaključujemo:



S obzirom da se 4 puta mijenja predznak nekog od izraza unutar apsolutne vrijednosti, ako želimo jednadžbu s apsolutnim vrijednostima napisati bez apsolutnih vrijednosti, morat ćemo riješiti 4 sustava tipa nejednadžba – jednadžba:

1)
$$\begin{cases} x \leq 0 \\ -x + 7 - x + 2(-x + 2) = 4 \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ x + 7 - x + 2(-x + 2) = 4 \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} 2 < x \leq 7 \\ x + 7 - x + 2(x - 2) = 4 \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} x > 7 \\ x - 7 + x + 2(x - 2) = 4 \end{cases}$$

Ovakvi sustavi se rješavaju tako da se riješi jednadžba, te se provjeri je li njeno rješenje unutar intervala na koji se odnosi nejednadžba. Ako je, to rješenje je rješenje početne jednadžbe.

Rješavanjem sustava tako dobijemo:

$$1) \begin{cases} x \leq 0 \\ -x + 7 - x + 2(-x + 2) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -x - x - 2x &= 4 - 7 - 4 \\ -4x &= -7 \\ x &= 7/4 \text{ (nije rješenje)} \end{aligned}$$

$$2) \begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ x + 7 - x + 2(-x + 2) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x - x - 2x &= 4 - 7 - 4 \\ -2x &= -7 \\ x &= 7/2 \text{ (nije rješenje)} \end{aligned}$$

$$3) \begin{cases} 2 < x \leq 7 \\ x + 7 - x + 2(x - 2) = 4 \end{cases} \quad 4)$$

$$\begin{aligned} x - x + 2x &= 4 - 7 + 4 \\ 2x &= 1 \\ x &= 1/2 \text{ (nije rješenje)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x > 7 \\ x - 7 + x + 2(x - 2) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x + x + 2x &= 4 + 7 + 4 \\ 4x &= 15 \\ x &= 15/4 \text{ (nije rješenje)} \end{aligned}$$

S obzirom da ni jedan sustav ne daje rješenje, zaključujemo da zadana **jednadžba nema rješenja!**

1. b) Riješi nejednadžbu $x^2 \cdot 5^x - 5^{2+x} \leq 0$

Rješenje:

Eksponencijalnu nejednadžbu u kojoj se eksponencijalne funkcije zbrajaju (oduzimaju) pokušamo dovesti u oblik u kojem te eksponencijalne funkcije imaju istu bazu i isti eksponent jer se jedino tako dvije ili više potencija zbrajanjem (oduzimanjem) mogu svesti na jednu potenciju.

Stoga ćemo primjenom pravila $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, ali „*unatrag*“ t.j. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, izraz 5^{2+x} rastaviti kao $5^2 \cdot 5^x$, pa naša nejednadžba poprima slijedeći oblik:

$$\begin{aligned} x^2 \cdot 5^x - 5^2 \cdot 5^x &\leq 0 \text{ i dalje,} \\ x^2 \cdot 5^x - 25 \cdot 5^x &\leq 0. \end{aligned}$$

Sada nakon izlučivanja 5^x dobivamo:

$$5^x(x^2 - 25) \leq 0.$$

S obzirom da na lijevoj strani imamo umnožak koji treba biti negativan, a faktor 5^x je uvijek pozitivan broj (svojstvo eksponencijalne funkcije $f(x) = a^x > 0$, za sve realne brojeve x), zaključujemo da drugi faktor $x^2 - 25$ mora biti ≤ 0 .

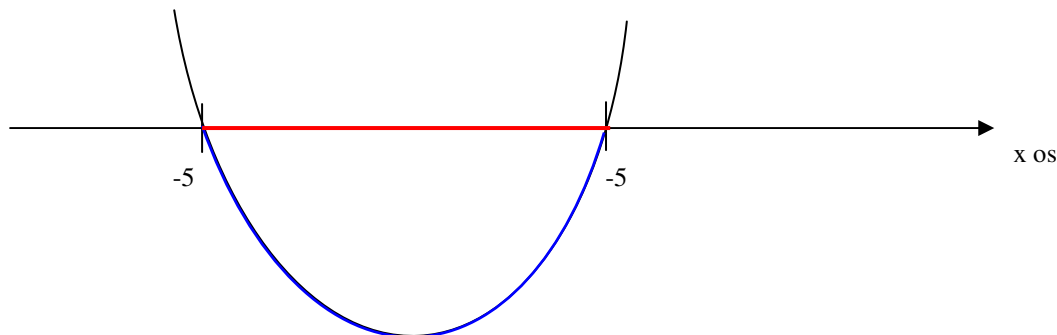
Dakle, naša eksponencijalna nejednadžba se svela na rješavanje kvadratne nejednadžbe.

Podsjetimo se - kvadratna nejednadžba $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c > 0$ se rješava u tri koraka:

- ✓ Riješimo pripadnu kvadratnu jednadžbu $ax^2 + bx + c = 0$.
- ✓ Na osnovu rješenja x_1 i x_2 jednadžbe i koeficijenta a skiciramo graf pripadajuće kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$
- ✓ Iz grafa „*pročitamo*“ rješenje nejednadžbe

Primjenimo ovaj postupak na kvadratnu nejednadžbu $x^2 - 25 \leq 0$:

- ✓ Rješimo jednadžbu $x^2 - 25 = 0$. ($x^2 = 25 \rightarrow x_1 = 5, x_2 = -5$)
- ✓ Skicirajmo graf ($a = 1 > 0$)



✓ Sada pročitamo rješenje na slijedeći način:

- nađemo na grafu točke čija je y koordinata „manja ili jednaka nuli“ ($y = x^2 - 25 \leq 0$).
(na našem grafu to su one točke koje su iscrtane plavom bojom)
- **rješenje nejednadžbe su x-evi tih točaka s grafa** (crvena boja)!!!

Rješenje nejednadžbe: $x \in [-5, 5]$.

1. c) Riješi jednadžbu $1 + \sin x \cdot \cos 2x = \sin x + \cos 2x$

Rješenje:

Najprije treba sve izraze prebaciti na lijevu stranu jednadžbe:

$$1 + \sin x \cdot \cos 2x - \sin x - \cos 2x = 0$$

Nakon toga su moguća dva slučaja – ili se cijela lijeva strana može rastaviti na faktore ili ne. Zadatak koji je pred nama nudi mogućnost rastava na faktore metodom grupiranja, npr. 1. i 3. člana ($1 - \sin x$) te 2. i 4. člana ($+\sin x \cdot \cos 2x - \cos 2x$). Pa učinimo to:

$$1 - \sin x + \sin x \cdot \cos 2x - \cos 2x = 0$$

Prva dva člana pretvorimo u jedan fiktivnim izlučivanjem broja 1, a iz 3. i 4. člana izlučimo $-\cos 2x$ (- je bitan kako bi i u zagradi nakon izlučivanja dobili izraz identičan onome kojeg tvore prva dva člana:

$$1(1 - \sin x) - \cos 2x(-\sin x + 1) = 0$$

Što je isto kao i

$$1(1 - \sin x) - \cos 2x(1 - \sin x) = 0$$

Sada možemo izlučiti $(1 - \sin x)$ nakon čega jednadžba poprima oblik:

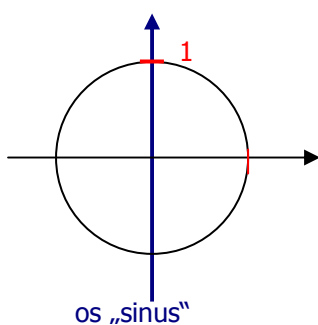
$$(1 - \sin x) \cdot (1 - \cos 2x) = 0$$

Zahvaljujući uspješno provedenom postupku faktorizacije i svojstvu umnoška koje kaže:

ako je $a \cdot b = 0$ onda je ili $a = 0$ ili $b = 0$,

naša jednadžba se svodi na rješavanje dviju elementarnih trigonometrijskih jednadžbi:

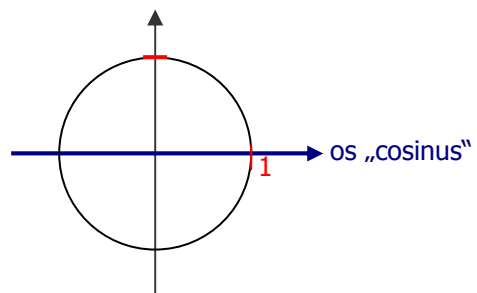
I) $1 - \sin x = 0$
t. j. $\sin x = 1$



Broj 1 na osi „sinus“ se istovremeno nalazi i na trigonometrijskoj kružnici u „točki“ $\pi/2$ pa je rješenje prve jednadžbe dano sa $x_1 = \pi/2 + 2k\pi$.

i

II) $1 - \cos 2x = 0$
 $\cos 2x = 1$



Broj 1 na osi „cosinus“ se istovremeno nalazi i na trigonometrijskoj kružnici u „točki“ 0 pa najprije vrijedi $2x_2 = 0 + 2k\pi$, te konačno, nakon dijeljenja s 2, $x_2 = 0 + k\pi$.

Komentar:

Važno je pri rješavanju znati da broj s desne strane jednadžbe „tražimo“ na brojevnom pravcu koji „predstavlja“ zadanu trigonometrijsku funkciju, a argument funkcije ($x, 2x, \dots$) izjednačavamo sa odgovarajućom vrijednosti na brojevnoj kružnici koja pripada broju s brojevnog pravca.

Ako brojčana vrijednost s pravca nije istovremeno i na brojevnoj kružnici tada se vrijednost na brojevnoj kružnici određuje tako da :

- vučemo okomicu na brojevni pravac koji predstavlja trigonometrijsku funkciju (za sin i cos)
- vučemo pravac kroz ishodište (za tg i ctg).

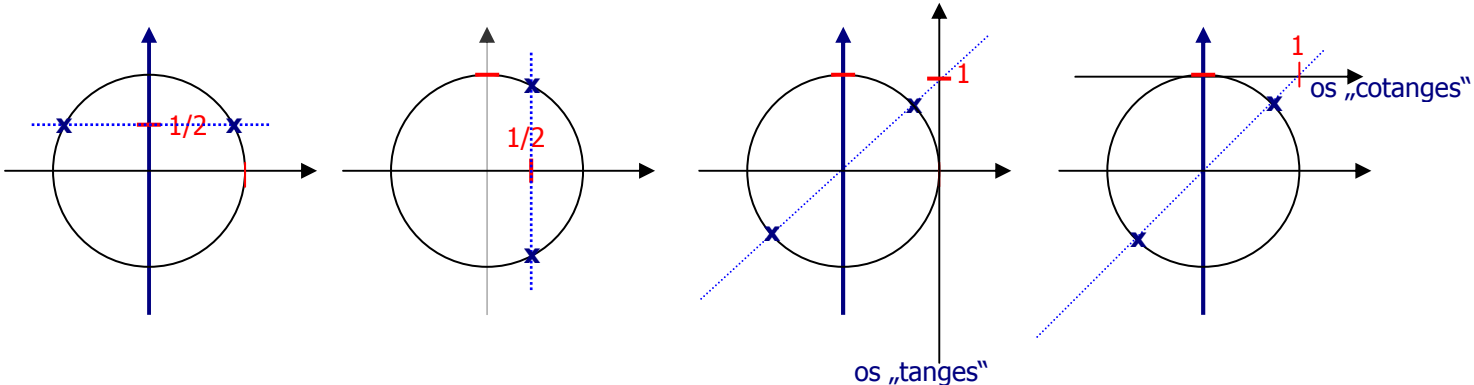
Pojasnimo to na slijedećim primjerima:
Riješimo jednađbe:

a) $\sin(kx + l) = 1/2$

b) $\cos(kx + l) = 1/2$

c) $\text{tg}(kx + l) = 1$

d) $\text{ctg}(kx + l) = 1$



Najprije tražimo vrijednosti na osi funkcije ($1/2$ i 1). Zatim kroz tu točku vučemo pravac ili okomito na os funkcije (jednađbe sa sin i cos) ili kroz ishodište (jednađbe s tg i ctg).

Na gornjim slikama, plavi, iscrtkani pravac pokazuje kako se, nakon određivanja položaja broja na brojevnom pravcu koji predstavlja os trigonometrijske funkcije, na ispravan način određuju točke na trigonometrijskoj kružnici - znak **x**, ovisno o tome je li jednađba zadana funkcijama sin i cos ili tg i ctg). Konačno rješenje se dobije tako što se riješi jednađba **$kx + l = \text{položaj } x + (2)k\pi$**

Konkretno, rješenje jednađbe:

$$\sin(2x + \pi/2) = 1/2$$

dobijemo na slijedeći način:

- ✓ iz tablica trigonometrijskih vrijednosti „*očitamo*“ da su **položaj x** vrijednosti $\pi/6$ i $5\pi/6$.
- ✓ riješimo jednađbe $2x + \pi/2 = \pi/6 + 2k\pi$ i $2x + \pi/2 = 5\pi/6 + 2k\pi$ te dobijemo rješenja $x_1 = -\pi/6 + k\pi$, $x_2 = \pi/6 + k\pi$

(rješavamo dvije jednađbe jer točke na kružnici nisu **dijametralno suprotne** – dijele kružnicu na dva luka **nejednake duljine**).

S druge strane, rješenje jednađbe

$$\text{tg}(2x + \pi/2) = 1/2$$

dobijemo na slijedeći način:

- ✓ iz tablica trigonometrijskih vrijednosti „*očitamo*“ da su položaj x vrijednosti $\pi/4$ i $3\pi/4$.
- ✓ riješimo jednađbu $2x + \pi/2 = \pi/4 + k\pi$ te dobijemo rješenje $x = -\pi/8 + k\pi/2$.

(rješavali smo samo jednu jednađbu, ali smo dodali $k\pi$ umjesto $2k\pi$ zato jer su točke na kružnici **dijametralno suprotne** – dijele kružnicu na dvije polukružnice)

1. d) Riješi jednađbu $1 + \log_2(x - 1) = \log_{(x-1)}4$

Rješenje:

Najprije moramo vidjeti uz koje uvjete na varijablu x ova logaritamska jednađba uopće postoji. Naime poznato je kako logaritam postoji samo ako su zadovoljena 3 uvjeta:

1. **argument > 0**
2. **baza > 0**
3. **baza $\neq 1$**

Stoga najprije postavljamo uvjete na jednadžbu:

$$x - 1 > 0 \text{ (argument 1. logaritma i baza 2. logaritma)}$$

$$x - 1 \neq 1 \text{ (baza 2. logaritma)}$$

rješenje uvjeta glasi:

$$x > 1 \ \& \ x \neq 2$$

Sada treba krenuti u rješavanje same jednadžbe. Valja uočiti problem – **baze logaritama nisu jednake!**

Taj problem nam rješava pravilo koje omogućava da baza i argument logaritma zamijene mjesta:

$$\log_b a = 1 / \log_a b$$

primjenom ovog pravila naša logaritamska jednadžba poprima slijedeći oblik:

$$1 + \log_2(x - 1) = 1 / \log_4(x - 1)$$

Ako uzmemo u obzir činjenicu da je $\log_4(x - 1) = \log_2^2(x - 1) = 1/2 \cdot \log_2(x - 1)$ jednadžba poprima oblik:

$$1 + \log_2(x - 1) = \frac{1}{0.5 \cdot \log_2(x - 1)}$$

Radi jednostavnosti uvedimo zamjenu

$$\log_2(x - 1) = t$$

pa jednadžba glasi:

$$1 + t = 2/t$$

Iz čega, množenjem s t lagano dobijemo

$$t + t^2 = 2, \text{ odnosno } t^2 + t - 2 = 0.$$

Rješavanjem ove kvadratne jednadžbe dobijemo rješenja $t_1 = 1, t_2 = -2$, te pomoću njih dvije jednadžbe oblika:

$$\log_2(x - 1) = 1 \quad \text{i} \quad \log_2(x - 1) = -2$$

No, to su elementarne logaritamske jednadžbe oblika

$$\log_{\text{baza}}(\text{argument}) = \text{eksponent}$$

koje se, po definiciji logaritma, pretvaraju u jednadžbe oblika

$$\text{argument} = \text{baza}^{\text{eksponent}}$$

Primjenjeno na našu jednadžbu dobijemo:

$$x - 1 = 2^1$$

$$x - 1 = 2^{-2}$$

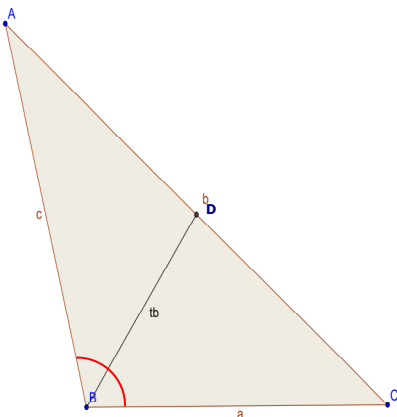
$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 5/4$$

Još treba pogledati zadovoljavaju li ta rješenja uvjete s početka zadatka t.j. je li $x > 1$ i je li $x \neq 2$.

S obzirom da $x = 5/4$ zadovoljava zadane uvjete to je ujedno rješenje početne jednadžbe, dok $x = 1$ **nije rješenje**.

2. a) Dvije stranice trokuta imaju duljine 82 i 56 i zatvaraju kut od $98^\circ 26'$. Kolika je duljina težišnice treće stranice?

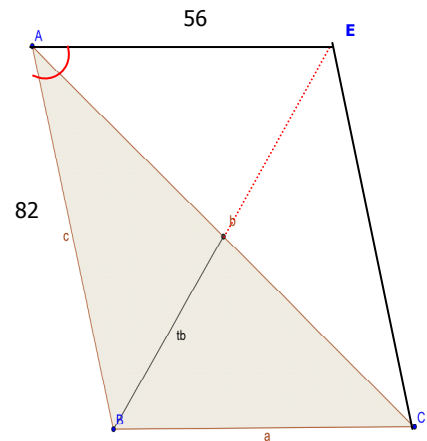


Zadatak je moguće riješiti na dva načina.

Prvi način koristi činjenicu da su u trokutu ABC poznata 3 elementa, pa je koristeći poučak o sinusima i kosinusu poučak moguće izračunati i ostale elemente (npr. stranicu b i kut α).

No, tada su i u trokutu ABD poznata tri elementa pa je moguće izračunati stranicu BD a to je $1/2$ težišnice pa samim time znamo i duljinu cijele težišnice.

Drugi način je efektivniji jer se do težišnice može doći samo jednom primjenom kosinusovog poučka. No, prije toga treba traženu težišnicu produžiti za vlastitu duljinu pri čemu nastaje četverokut ABCE. To je četverokut kojem se dijagonale (AC i BE) raspolavljaju, a takav četverokut je paralelogram.



Nadalje, za paralelogram vrijedi da susjedni kutovi zajedno čine 180 stupnjeva, pa stoga kut BAE (crveni luk na slici) iznosi $180 - \beta$.

U trokutu ABE znamo dvije stranice: $|AB| = 82$, $|AE| = 56$ i kut uz vrh A = $180^\circ - 98^\circ 26' = 81^\circ 54'$ pa možemo primijeniti kosinusov poučak:

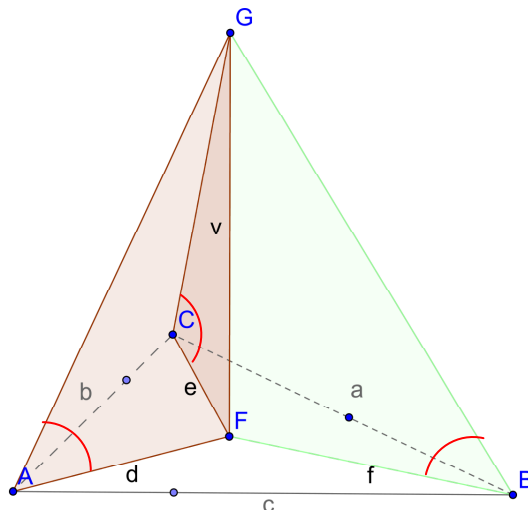
$$(1.\text{stranica}^2 = 2.\text{stranica}^2 + 3.\text{stranica}^2 - 2 \cdot 2.\text{stranica} \cdot 3.\text{stranica} \cdot \cos(2.\text{stranica}, 3.\text{stranica}))$$

$$(2t)^2 = |AB|^2 + |AE|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AE| \cdot \cos(81^\circ 54')$$

$$(2t)^2 = 82^2 + 56^2 - 2 \cdot 82 \cdot 56 \cdot \cos(81^\circ 54')$$

Daljnje zadovoljstvo računanja prepuštam vama učenicima 😊

2. b) Osnovka uspravne piramide je trokut kojemu su zadani kutovi $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 60^\circ$, a polumjer osnovke opisane kružnice je 9. Izračunaj volumen piramide ako njeni pobočni bridovi zatvaraju s ravninom osnovke kut $\varphi = 50^\circ$.



$\alpha = 35^\circ$
 $\beta = 60^\circ$
 $r = 9$
 $\varphi = 50^\circ$

Najprije pogledajmo trokute AFG, BFG i CFG.

- ✓ Sva tri trokuta su pravokutna (FG visina piramide – okomita na bazu)
- ✓ Sva tri trokuta imaju jedan kut isti (onaj kojeg bočni brid zatvara s bazom – crveni luk na slici)
- ✓ Sva tri trokuta imaju jednu stranicu sukladnu (FG zajednička stranica)

$V = ?$
 $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot v$

Stoga su ova tri trokuta sukladna, pa zaključujemo da je $|AF| = |BF| = |CF|$. To znači da je točka F središte trokutu opisane kružnice i da je $d = e = f = 9$.

Uzmimo jedan od tri sukladna pravokutna trokuta te primjenom trigonometrije pravokutnog trokuta izračunajmo visinu piramide:

$$\text{tg } \varphi = v/r \rightarrow v = r \cdot \text{tg } \varphi = 9 \cdot \text{tg } 50^\circ$$

Preostaje nam još izračunati površinu baze.

Možemo izračunati kut γ , $\gamma = 180 - (\alpha + \beta) = 85^\circ$, tako da znamo sva tri kuta baze i polumjer opisane kružnice r .

Do površine trokuta možemo doći kombinirajući 4 formule za površinu:

$$P = 1/2 \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

$$P = 1/2 \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta$$

$$P = 1/2 \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$$

$$P = (a \cdot b \cdot c) / 4r$$

Pomnožimo prve tri formule:

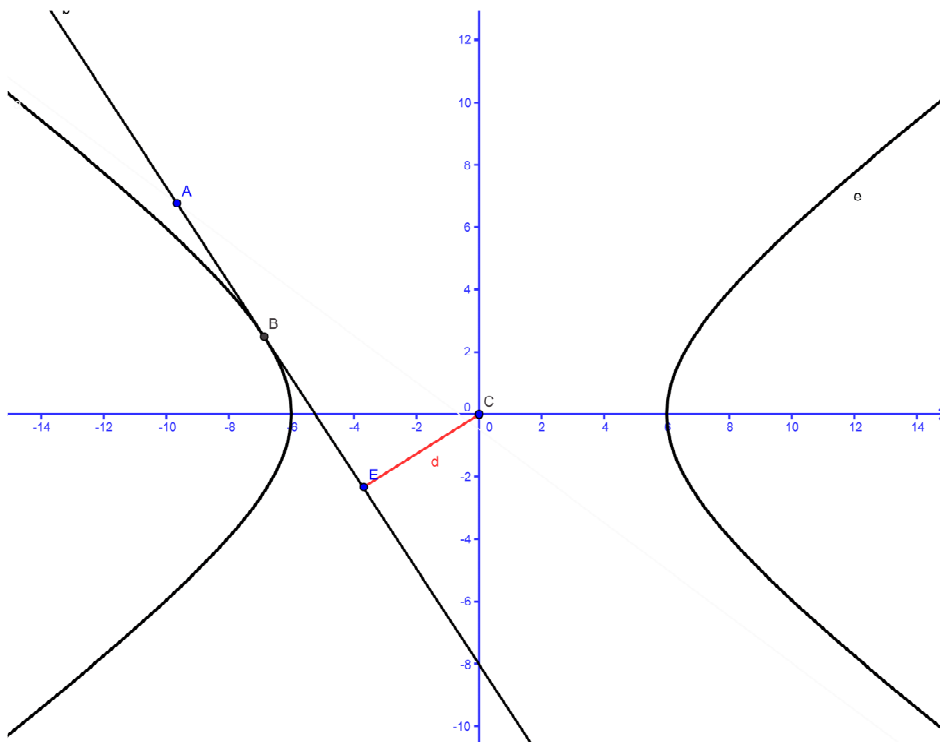
$$P^3 = 1/8 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = 1/8 \cdot (a \cdot b \cdot c)^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

Budući iz 4. formule slijedi $a \cdot b \cdot c = 4 \cdot P \cdot r$, kombinacijom ova dva izraza dobijemo formulu $P^3 = 1/8 \cdot (4 \cdot P \cdot r)^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$, odnosno

$$P = 2 \cdot r^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

$$V = 1/3 \cdot B \cdot v = (\text{pogađate, prepuštam vam da sami dođete do rezultata 😊})$$

2. c) Odredi one tangente hiperbole $20 \cdot x^2 - 36 \cdot y^2 = 720$ kojih udaljenost od ishodišta iznosi $\sqrt{8}$.



Naći jednadžbe tangenti znači, u stvari, naći jednadžbe pravaca $y = kx + l$ odnosno **odrediti k i l** tih pravaca. Stoga iz zadanih podataka treba napisati dvije jednadžbe u kojima su nepoznanice k i l te rješavanjem sustava doći do njihovih vrijednosti.

Prva jednadžba se „krije“ u **uvjetu dodira** pravca (tangente) i hiperbole koji glasi:

$$a^2 \cdot k^2 - b^2 = l^2$$

Druga jednadžba se „krije“ u primjeni formule za **udaljenost točke od pravca**:

$$d(T,p) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

gdje je točka T **ishodište**, a pravac p **tangenta**.

Odredimo a^2 i b^2 iz jednadžbe hiperbole i uvrstimo u uvjet dodira:

$$b^2 = 20, a^2 = 36$$

(jer je $20 \cdot 36 = 720$, inače bi morali jednadžbu hiperbole prevesti u segmentni oblik kako bi „očitali“ a i b).

Stoga prva jednačba glasi:

$$36k^2 - 20 = l^2$$

Kreirajmo sada drugu jednačbu. Točka T je ishodište t.j. (0,0). No, moramo jednačbu tangente dovesti u implicitni oblik:

$$y = kx + l \text{ (prebacimo } kx \text{ i } l \text{ na lijevu stranu)}$$
$$-kx + y - l = 0 \text{ (dakle, } A = -k, B = 1 \text{ a } C = -l).$$

Uvrštavanjem u formulu za udaljenost točke od pravca dobijemo drugu jednačbu:

$$\sqrt{8} = \frac{|-k \cdot 0 + 1 \cdot 0 - l|}{\sqrt{k^2 + 1^2}}$$

koja nakon kvadriranja i množenja sa nazivnikom prelazi u oblik:

$$8(k^2 + 1) = l^2$$

Budući su desne strane obiju jednačbi jednake, možemo izjednačiti i lijeve strane:

$$8(k^2 + 1) = 36k^2 - 20$$

Što nakon sređivanja daje

$$-28k^2 = -28, \text{ odnosno } k^2 = 1,$$

iz čega je jasno da postoje dva rješenja za **k**:

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = -1$$

Preostaje nam da svako od tih rješenja uvrstimo u jednu od dvije jednačbe te izračunamo i odsječke l:

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = -1$$

$$l^2 = 8 \cdot 1 + 8$$

$$l^2 = 8 \cdot 1 + 8$$

$$l^2 = 16$$

$$l^2 = 16$$

$$l_1 = 4 \quad l_2 = -4$$

$$l_3 = 4 \quad l_4 = -4$$

Dakle, postoje ukupno četiri tangente:

$$t_1 \dots y = x + 4$$

$$t_2 \dots y = x - 4$$

$$t_3 \dots y = -x + 4$$

$$t_4 \dots y = -x - 4$$

3. a) Zadan je trokut s vrhovima A(-1, -1), B(-3, 5) i C(7, 11). Služeći se skalarnim produktom vektora odredite kutove trokuta.

Da bi vektorski odredili kut trokuta, moramo stranice trokuta prikazati kao dva vektora s početkom u vrhu trokuta čiji kut računamo.

Prisjetimo se:

$$T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2) \text{ ,dvije točke u koordinatnom sustavu.}$$

Tada se vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$ dobije na slijedeći način:

$$\overrightarrow{T_1T_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

Nadalje, ako su a i b dva vektora kut između njih se dobije formulom:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Pri tome je $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$ (skalarni umnožak vektora), a

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \text{ (duljina vektora).}$$

Primjenimo sve to na zadani trokut. Najprije izračunajmo vektore uz vrh A trokuta – AB i AC, zatim njihove duljine i skalarni umnožak:

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= (-3 - (-1))i + (5 - (-1))j = -2i + 6j & |\vec{AB}| &= \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{40} \\ \vec{AC} &= (7 - (-1))i + (11 - (-1))j = 8i + 12j & |\vec{AC}| &= \sqrt{8^2 + 12^2} = \sqrt{208} \\ \vec{AB} * \vec{AC} &= -2*8 + 6*12 = 56\end{aligned}$$

Uvrstimo sve u formulu za cosinus kuta između ta dva vektora:

$$\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{56}{\sqrt{40} * \sqrt{208}}$$

te izračunamo kut uz vrh A. Isti postupak ponovimo i za računanje kuta uz vrh B (vektori BA i BC). Kut uz vrh C dobijemo oduzimanjem od 180° zbroja kutova uz vrhove A i B.

Opaz: Važno je da početna točka obaju vektora bude vrh čiji kut računamo (inače nećemo dobiti unutarnji već **vanjski kut trokuta!!!**)

3. c) Matematičkom indukcijom dokaži	$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$
---	---

1.korak indukcije:

Treba dokazati tvrdnju za n = 1, tj. kada se suma na lijevoj strani sastoji od samo jednog (prvog) razlomka, a razlomak na desnoj strani poprimi vrijednost n = 1:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}$$

Što je, očigledno točno.

2. korak indukcije:

Pretpostavimo da postoji prirodni broj n za koji tvrdnja $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ vrijedi.

(pretpostavka je točna jer smo u prvom koraku pokazali da bar jedan prirodni broj, za koji je tvrdnja točna, postoji)

3. korak indukcije:

Treba dokazati slijedeće: **Kad god tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj n ona vrijedi i za n+1!!!**

Dokaz:

Kreirajmo tvrdnju za n+1. Lijevu sumu moramo proširiti sa slijedećim razlomkom koji „nastavlja“ sumu, a na desnoj strani varijablu n zamijeniti sa n+1. Kada to napravimo, tvrdnja koju treba dokazati glasi:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$$

Svaka tvrdnja se dokazuje tako da se „raspisuje“ lijeva strana i pokuša se dobiti izraz na desnoj strani. Dakle,

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}}_{\substack{\text{Po pretpostavci (2. korak) jednako} \\ \frac{n}{2n+1}}} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\ & = \frac{n \cdot (2n+3) + 1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{(2n+1)(2n+3)} \\ & = \frac{2n^2 + 2n + n + 1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n(n+1) + (n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \\ & = \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} \end{aligned}$$

4. a) Zbroj aritmetičkog niza od 6 članova je 18. Pomnoži li se zadnji član sa zbrojem prethodnih članova dobije se 65. koji je prvi član i diferencija niza?

$$S_6 = 18$$

$$\frac{a_6 \cdot S_5 = 65}{a_1, d = ?}$$

Zadatak ćemo riješiti koristeći se formulom za sumu prvih n članova aritmetičkog niza i i formulom za opći član tog niza:

$$S_n = n/2 \cdot (a_1 + a_n)$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Primjenom prve navedene formule na S_5 i S_6 nastaje slijedeći sustav jednačbi:

$$6/2 \cdot (a_1 + a_6) = 18$$

$$a_6 \cdot 5/2 \cdot (a_1 + a_5) = 65$$

a primjenom druge formule na a_5 i a_6 sustav poprima oblik:

$$6/2 \cdot (a_1 + a_1 + 5d) = 18$$

$$(a_1 + 5d) \cdot 5/2 \cdot (a_1 + a_1 + 4d) = 65$$

Nakon sređivanja sustav poprima oblik:

$$2a_1 + 5d = 6$$

$$(a_1 + 5d) \cdot (2a_1 + 4d) = 26$$

Ako iz prve jednačbe izrazimo a_1 ($a_1 = 3 - 5/2d$) i uvrstimo u drugu jednačbu, nakon sređivanja nastaje kvadratna jednačba:

$5d^2 - 24d + 16 = 0$, čija su rješenja 4 i 4/5. Dakle, postoje dva niza koja zadovoljavaju dane uvjete:

I)

$$d = 4$$

$$a_1 = 3 - 5/2 \cdot 4 = -7$$

II)

$$d = 4/5$$

$$a_1 = 3 - 5/2 \cdot 4/5 = 1$$

4. b) Izračunaj $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$.

Najprije treba uvrstiti vrijednost $x = -2$ u izraz kako bi vidjeli hoćemo li dobiti neodređeni izraz ($\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$).

Na žalost, u našem slučaju je to $\frac{0}{0}$. S obzirom da u brojniku imamo korijen valja pristupiti „racionalizaciji“.

Prilikom racionalizacije važno je voditi računa radi li se o racionalizaciji drugog ili trećeg korijena. Drugi korijen racionaliziramo formulom za razliku kvadrata

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

dok treći korijen racionaliziramo razlikom ili zbrojem kubova:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \text{ ili } (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

Izraz čiji limes računamo u brojniku ima treći korijen pa racionalizaciju provodimo „naštímavajući“ zbroj kubova pri čemu izraz u brojniku shvaćamo kao $(a + b)$ te ga moramo pomnožiti s $(a^2 - ab + b^2)$ kako bi kao rezultat dobili $a^3 + b^3$ pa će kub „pokratiti“ korijen prvog člana. Dakle:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x-6})^2 - 2 \cdot \sqrt[3]{x-6} + 4}{(\sqrt[3]{x-6})^2 - 2 \cdot \sqrt[3]{x-6} + 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt[3]{x-6} + 2)(\sqrt[3]{x-6})^2 + 2^3}{(x^3 + 8)[(\sqrt[3]{x-6})^2 - 2 \cdot \sqrt[3]{x-6} + 4]} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - 6 + 8}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4) \left[(\sqrt[3]{x-6})^2 - 2 \cdot \sqrt[3]{x-6} + 4 \right]} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4) \left[(\sqrt[3]{x-6})^2 - 2 \cdot \sqrt[3]{x-6} + 4 \right]}$$

što nakon kraćenja i uvrštavanja $x = -2$ daje:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x^2 - 2x + 4) \left[(\sqrt[3]{x-6})^2 - 2 \cdot \sqrt[3]{x-6} + 4 \right]} =$$

$$= \frac{1}{(4 + 4 + 4) \left[(\sqrt[3]{-8})^2 - 2 \cdot \sqrt[3]{-8} + 4 \right]} = \frac{1}{144}$$

4. c) Odredi derivaciju funkcije $f(x) = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b}$, ($b \neq 0$)

Deriviramo po pravilu za derivaciju sume te svaki član po pravilu za derivaciju složene funkcije. Primjetimo, također, da su a i b konstante.

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+b^2}}{x+a} \cdot \left(\frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} \right)' + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{b} \right)^2} \cdot \left(\frac{x}{b} \right)' =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+b^2}}{x+a} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+b^2} - (x+a) \cdot (\sqrt{x^2+b^2})'}{x^2+b^2} + \frac{a}{b} \cdot \frac{b^2}{b^2+x^2} \cdot \frac{1}{b} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+b^2}}{x+a} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+b^2} - (x+a) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+b^2}}}{x^2+b^2} + \frac{a}{b^2+x^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+b^2}}{x+a} \cdot \frac{x^2+b^2 - x(x+a)}{x^2+b^2} + \frac{a}{b^2+x^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+b^2}}{x+a} \cdot \frac{b^2 - ax}{(x^2+b^2)\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{a}{b^2+x^2} =$$

$$= \frac{b^2 - ax}{(x^2+b^2)(x+a)} + \frac{a}{b^2+x^2} = \frac{b^2 - ax + ax + a^2}{(x^2+b^2)(x+a)} =$$

$$= \frac{b^2 + a^2}{(x^2+b^2)(x+a)}$$

5. Zadana je funkcija $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$. Odredi:

- a) domenu funkcije
- b) nul-točke funkcije
- c) ekstreme funkcije
- d) asimptote funkcije
- e) nacrtaj graf funkcije

S obzirom da se radi o racionalnoj funkciji, potrebno je i brojnik i nazivnik rastaviti na faktore te koristiti slijedeće teoretske činjenice:

- ✓ Područje definicije racionalne funkcije su svi $x \in \mathbb{R}$ osim nul-točki nazivnika.
- ✓ Nul-točke nazivnika su ujedno i točke u kojima funkcija ima vertikalne asimptote
- ✓ Kosa asimptota postoji ako je stupanj brojnika „za jedan veći” od stupnja nazivnika
- ✓ Horizontalna asimptota postoji ako je stupanj brojnika „manji ili jednak” stupnju nazivnika (stupanj polinoma je najveći eksponent varijable x)
- ✓ Nul-točke funkcije su nul-točke brojnika

Primjenimo ove teorijske činjenice na zadanu funkciju:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)(x - 3)}$$

a) Domena funkcije je $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$ (nazivnik = 0, ... $(x - 2)(x - 3) = 0, \dots, x - 2 = 0, x - 3 = 0$)

b) Nul-točke funkcije su $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$ (brojnik = 0, ... $(x - 1)(x + 1) = 0, \dots, x - 1 = 0, x + 1 = 0$)

d) Vertikalne asimptote su pravci $x = 2$ i $x = 3$ (x -evi za koje funkcija nije definirana)

Funkcija nema kosih asimptota jer je **stupanj brojnika = stupanj nazivnika = 2**, pa nije zadovoljen uvjet da stupanj brojnika treba biti za jedan veći od stupnja nazivnika.

(Stupanj brojnika je 2 jer je 2 najveća potencija od x u brojniku (x^2). Iz istog razloga je i stupanj nazivnika 2).

No, funkcija ima horizontalnu asimptotu. Horizontalnu asimptotu računamo tako da podijelimo vodeće koeficijente brojnika i nazivnika (to su koeficijenti uz „ x na najveću potenciju”). Naša funkcija ima i u brojniku i u nazivniku vodeće koeficijente 1, pa je horizontalna asimptota pravac $y = 1/1 = 1$.

Napomena:

Ukoliko je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika, horizontalna asimptota je pravac $y = 0$ (os x) !!!

c) Da bi odredili ekstreme funkcije potrebno je provesti slijedeći postupak:

- ✓ Izračunati derivaciju funkcije $f'(x)$
- ✓ Riješiti jednadžbu $f'(x) = 0$
- ✓ Izraditi tablicu predznaka derivacije i na osnovu nje odrediti ekstreme funkcije

Najprije izračunajmo derivaciju funkcije (po pravilu za derivaciju kvocijenta):

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 5x + 6) - (x^2 - 1)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 6)^2} = \text{nakon sređivanja} = \frac{-5x^2 + 14x - 5}{(x^2 - 5x + 6)^2}$$

Sada rješavamo jednadžbu $f'(x) = 0$.

$$-5x^2 + 14x - 5 = 0, \text{ te dobijemo rješenja } x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{6}}{5}$$

Izradimo tablicu predznaka derivacije i tijeka funkcije, pri čemu osim nul-točki prve derivacije obavezno u tablicu smještamo i točke prekida:

x	$-\infty$	$\frac{7-2\sqrt{6}}{5}$	2 (asimpt.)	$\frac{7+2\sqrt{6}}{5}$	3 (asimpt.)	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	+	-	-
$f(x)$		graf pada	graf raste	graf raste	graf pada	graf pada
		min		max		

Primjetimo da ponašanje prve derivacije ovisi isključivo o brojniku jer je nazivnik (zbog kvadrata) uvijek pozitivan. Budući je u brojniku kvadratni polinom čiji je kvadratni koeficijent $a = -5 < 0$ zaključujemo da prva derivacija prima negativne vrijednosti „prije” i „poslije” nul-točki, a „između” nul-točki je prva derivacija pozitivna.

S obzirom da prva derivacija mijenja predznak zaključujemo da za $x = \frac{7-2\sqrt{6}}{5}$ funkcija poprima minimum, a za $x = \frac{7+2\sqrt{6}}{5}$ funkcija poprima maksimum.

e) Sada nam preostaje da na osnovu svega nacrtamo graf funkcije. Za lakše crtanje dobro je imati na umu činjenicu da su nul-točke nazivnika jednostruke pa će graf u odnosu na asimptote imati skok (ako je s jedne strane asimptote graf završio u $+\infty$ onda će se s druge strane „pojavit” u $-\infty$, i obrnuto).

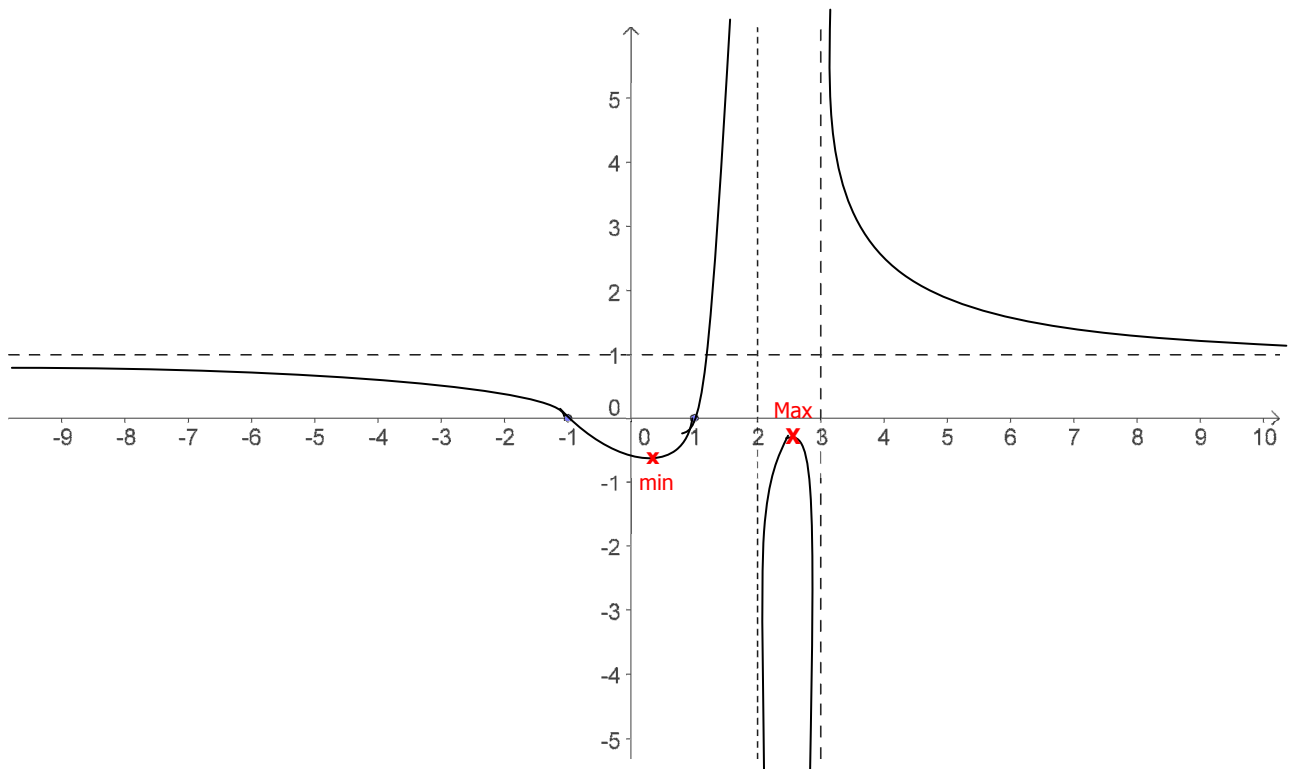
Komentar:

$x - x_0 = 0$ je jednačina čija je nul-točka x_0 . Kažemo da je to jednostruka nul-točka.

$(x - x_0)^2 = 0$ je jednačina čija je nul-točka također x_0 . Ali sada je to dvostruka nul-točka (kratnosti 2).

Analogno tome, jednačina $(x - x_0)^n = 0$ ima **n-terostruku** nul-točku x_0 .

Općenito, kada je **nul-točka neparne kratnosti** graf funkcije ima „**skok**” u odnosu na asimptotu (ako s jedne strane asimptote završava u $+\infty$, s druge strane „počinje” iz $-\infty$ i obrnuto)..



Rješenja izradio:

Mile Bužančić